Anwendungsübungen Analysis II

Ali Reza Jafarian, Marc Shaw

Aufgabe 7

$$R''(x) + V(x)R(x) = 0$$
$$R(x) = f\big(r(x)\big)G(r(x))$$

a) Man erhält wieder die Lösung, weil bei der Transformation der DGL auch ihre Lösungen transformiert werden.
b) Vorgehen: Zuerst leiten wir R(x) zweimal ab

$$R''(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2}\right)[R(x)] = \left(\frac{d}{dx}\right)\left[\left(\frac{d}{dx}\right)(R(x))\right]$$

$$\left(\frac{d}{dr}\right) = ()'$$
$$\left(\frac{d}{dx}\right) = (^\circ)$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)[f' * \dot{r} * G + f * G' * \dot{r}]$$
$$= (f'' * \dot{r} * G * r + f`' * G * r^{\circ\circ} + f' * \dot{r} * \dot{r} * G' + f' * G' * \dot{r} * \dot{r} + f * \dot{r} * G'' * \dot{r} + f * G' * r^{\circ\circ}$$

Nun wird G und die Ableitungen G' und G'' ausgeklammert:

$$R''(x) = G(f'' * \dot{r}^2 + f' * r^{\circ\circ}) + G'(2 * f' * \dot{r}^2 + f * r^{\circ\circ}) + G''(f * \dot{r}^2)$$

G' muss gleich null gesetzt werden, damit wir wieder die ursprüngliche Form erhalten:

$$R''(x) + V(x)R(x) = 0$$

Daraus ergibt sich folgende Gleichung:

$$2 * f' * \dot{r}^2 + f * r^{\circ\circ} = 0$$

$$2 * \left(\frac{f'}{f}\right) = -\left(\frac{r^{\circ\circ}}{\dot{r}^2}\right)$$

Nun müssen wir Rücktransformieren. Hierfür führen wir eine Integration durch:

$$2 * \int \left(\frac{f'}{f}\right) df = -\int \left(\frac{r^{\circ\circ}}{\dot{r}^2}\right) dr$$

Wir wenden das Substitutionsverfahren an und erhalten:

$$dr = \left(\frac{dr}{dx}\right) dx = \dot{r} * dx$$

$$2 * \int \left(\frac{f'}{f}\right) df = -\int \left(\frac{r^{\circ\circ}}{\dot{r}}\right) dx$$

$$2 * ln|f| + c = -ln|\dot{r}| + k$$

$$e^{2\ln|f|+c} = e^{-(\ln|\dot{r}|+k)}$$

$$|f|^2 * e^c = |\dot{r}|^{-1} * e^k$$

$$f^2 * e^c = |\dot{r}|^{-1} * e^k$$

Anschließend lösen wir die Gleichung nach $\dot{r}$ auf.

$$|\dot{r}| = \left(\frac{e^k}{(f^2 * e^c)}\right) = (\frac{D}{f^2})$$

Die beiden Konstanten e^k und e^c werden zu einer Konstante D zusammengefasst. Das Betragszeichen von $\dot{r}$ fällt in der Berechnung weg, da $\dot{r}$ quadratisch ist.

Jetzt wird $r^{\circ\circ}$ in Abhängigkeit von f und f' dargestellt:

$$2 * \left(\frac{f'}{f}\right) = -(\frac{r^{\circ\circ}}{\dot{r}^2})$$

$$r^{\circ\circ} = -\frac{2f'D^2}{f^5}$$

Nun müssen wir in die ursprüngliche Gleichung einsetzten um das Ergebnis zu überprüfen:

$$G = \left(\frac{f''D^2}{f^4} + f' * -\frac{2f'D^2}{f^5}\right) + G' * \left(2 + f' * \frac{D}{f^4} + f * -\frac{2f'D^2}{f^5}\right) + G'' * \left(f * \frac{D^2}{f^4}\right) + V * (f * G) = 0$$

$$(2 * f' * \frac{D^2}{f^4} + f * -\frac{2f'D^2}{f^5}) = 0$$

G' fällt somit weg und wir erhalten:

$$G * \left(\frac{f''D^2}{f^4} - \frac{2(f'^2D^2}{f^5}\right) + G'' * \left(\frac{D^2}{f^3}\right) + V * (f * G) = 0$$

$$G''G * (\left(\frac{f''}{f}\right) - \left(\frac{2f'^2}{f^2}\right) + \left(\frac{(V * f^4)}{D^2}\right) = 0$$

Somit ist die Transformation erfolgreich durchgeführt.